

## Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2014 – 2015 учебном году  
11 класс**

*Время выполнения заданий — 4 часа*

**11.1.** *Бесконечная арифметическая прогрессия, целиком состоящая из натуральных чисел, содержит число  $a$  и его квадрат. Докажите, что она содержит и куб числа  $a$ .*

**Решение:**

Способ 1. Утверждение очевидно, если  $a = 1$  (в этом случае  $a^2 = a^3 = 1 = a$ ). Пусть  $a > 1$ . Рассмотрим другую арифметическую прогрессию. Прогрессию, у которой первый член равен  $a$ , второй равен  $a^2$ . Эта вторая прогрессия полностью состоит из элементов первой, так как её разность (равная  $a^2 - a = d$ ) в целое число раз больше разности исходной прогрессии. Но  $a^3 = a \cdot a^2 = a(a + d) = a^2 + ad = a + d + ad = a + (a + 1)d$ , и так как  $a$  — натуральное число,  $a^3$  является членом новой прогрессии с номером  $a + 2$ . Утверждение доказано.

Способ 2. Будем считать, что  $a > 1$  (случай  $a = 1$  тривиален). Тогда  $a < a^2 < a^3$ , так как  $a$  — натуральное число. По условию прогрессия не убывающая, иначе бы в ней присутствовали отрицательные числа. Можно считать, что  $a$  — первый член прогрессии. Пусть  $a^2 = a + nd$ , где  $d$  — разность. Тогда  $a^3 - a^2 = a(a^2 - a) = and$  и  $a^3 = a^2 + and = a + d(n + an)$  — член прогрессии с номером  $n + an - 1$ .

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                             | баллы    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| верное доказательство                                                                                     | 7 баллов |
| в верном доказательстве опущен случай $a = 1$                                                             | 6 баллов |
| задача решена для случая прогрессии, в которой $a$ — первый член, а $a^2$ — второй                        | 4 балла  |
| имеется верное выражение для чисел $a$ , $a^2$ и $a^3$ через первый член и разность прогрессии            | 3 балла  |
| есть идея (не доведённая до решения) рассмотреть прогрессию, в которой числа $a$ и $a^2$ последовательные | 2 балла  |
| рассмотрен случай постоянной $a = 1$                                                                      | 1 балл   |
| рассмотрены конкретные прогрессии (в конечном количестве)                                                 | 0 баллов |

**11.2.**  $\overline{ABC}$  — трёхзначное число, то есть  $\overline{ABC} = 100A + 10B + C$ , где  $A, B, C$  — цифры, и  $A \neq 0$ . Может ли сумма  $\overline{ABC} + \overline{BCA} + \overline{CAB}$  быть квадратом натурального числа? Ответ обосновать.

**Решение:** Указанная сумма равна  $111(A + B + C)$ . Она делится на 111, и, так как в разложении числа 111 на простые множители присутствуют только первые степени, делится и на  $111^2$ . Тогда  $A + B + C$  должно делиться на 111, что невозможно, так как  $1 \leq A + B + C \leq 27$ .

**Примечание:** Достаточно рассматривать делимость на 37.

**Ответ:** Не может.

Рекомендации по проверке:

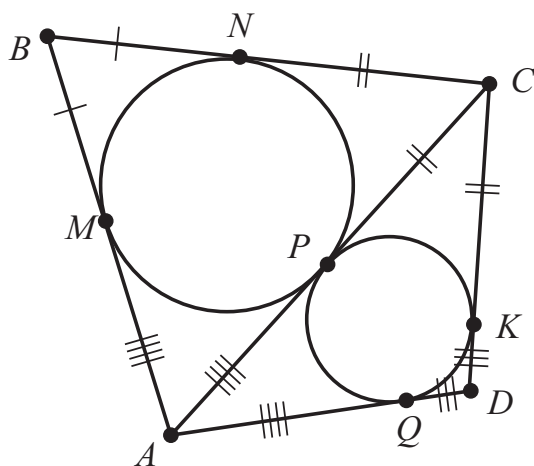
| есть в работе                                                                                                       | баллы    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| верное доказательство                                                                                               | 7 баллов |
| задача решена в неверном допущении, что число 111 — простое                                                         | 5 баллов |
| задача сведена к доказательству факта, что число $111(A + B + C)$ (или $111A + 111B + 111C$ ) не является квадратом | 3 балла  |
| ответ без обоснования и/или иллюстрация факта примерами                                                             | 0 баллов |

**11.3.** Баба-Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов, при этом общее количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги было в 12 раз больше, чем на мухоморах Кощея. Когда Баба-Яга отдала Кощей свой мухомор с наибольшим количеством крапинок, на её мухоморах стало крапинок только в 7 раз больше, чем у Кощея. Докажите, что Баба-Яга собрала не менее 20 мухоморов.

**Решение:** Пусть на мухоморах Кощея  $a$  крапинок; тогда на мухоморах Бабы Яги  $12a$  крапинок. Пусть на отданном Кощей мухоморе  $b$  крапинок; тогда имеем, что  $12a - b = 7(a + b)$ , откуда  $5a = 8b$  или  $a = 1,6b$ . На оставшихся мухоморах Бабы Яги крапинок  $12a - b = 18,2b$ , то есть более, чем в 18 раз больше, чем на отданном мухоморе. Так как на каждом из оставшихся мухоморов крапинок не больше, чем на отданном, то осталось у Яги не меньше 19 мухоморов, а всего она собрала не меньше 20.

| есть в работе                                                                                                                                                                  | баллы                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| верное доказательство                                                                                                                                                          | 7 баллов                          |
| в верном решении есть вычислительные ошибки, не влияющие на ход решения                                                                                                        | 6 баллов                          |
| найдено отношение количества оставшихся у Бабы Яги крапинок (или общего числа её крапинок) к количеству отданных                                                               | 4 балла                           |
| обоснованно получено диофантово уравнение, ведущее к решению                                                                                                                   | 3 балла                           |
| сформулировано утверждение, что достаточно показать (или имеется попытка доказать), что на оставшихся мухоморах Бабы Яги крапинок больше, чем в 18 раз больше, чем на отданном | 2 балла                           |
| наличие (отсутствие) примера, показывающее непротиворечивость условия и/или разбор (не разбор) случая, когда на мухоморах вообще нет крапинок                                  | баллы не ставить, но и не снижать |

**11.4.**  $ABCD$  — выпуклый четырёхугольник. Известно, что окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ADC$ , касаются друг друга. Докажите, что касаются друг друга и окружности, вписанные в треугольники  $BCD$  и  $BAD$ .



к решению задачи 11.4,  
необходимость

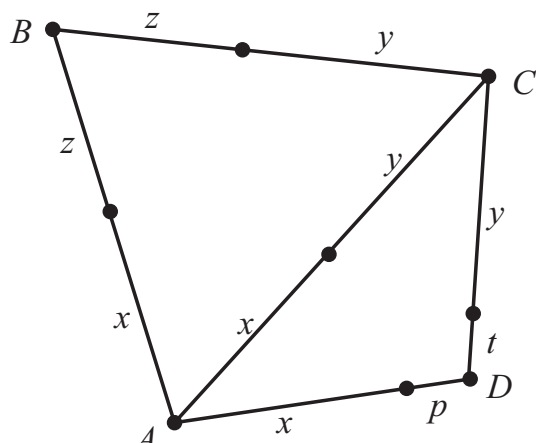
**Решение:** Покажем, что окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ADC$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ , касаются друг друга тогда и только тогда, когда в четырёхугольник можно вписать окружность. Из этого, очевидно, следует утверждение задачи.

Необходимость. Пусть окружность, вписанная в треугольник  $ABC$  касается его сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $P$  соответственно, а окружность, вписанная в треугольник  $ADC$  касается сторон  $AD$ ,  $DC$  и  $AC$  в точках  $Q$ ,  $K$  и  $P$  соответственно. Тогда  $BM = BN$ ,  $DQ = DK$ ,  $AM = AP = AQ$  и  $CN = CP = CK$  (см. рисунок), откуда суммы противоположных сторон четырёхугольника  $ABCD$  равны, и он описанный.

Тогда  $BM = BN$ ,  $DQ = DK$ ,  $AM = AP = AQ$  и  $CN = CP = CK$  (см. рисунок), откуда суммы противоположных сторон четырёхугольника  $ABCD$  равны, и он описанный.

Достаточность. Пусть нам дан четырёхугольник  $ABCD$ , в который можно вписать окружность. Это значит, что  $AB + CD = AD + BC$ . Проведём в четырёхугольнике диагональ  $AC$  и отметим в треугольнике  $ABC$  точки касания вписанной в этот треугольник окружности. Пусть расстояния от точек касания

до вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны  $x$ ,  $z$  и  $y$  соответственно (см. рисунок).



к решению задачи 11.4,  
достаточность

тательными одновременно, то они обе положительны, и отмеченные точки лежат на сторонах четырёхугольника (а не на продолжениях). Из доказанного равенства  $p = t$  следует, что отмеченные на сторонах треугольника  $ACD$  точки являются точками касания вписанной в треугольник окружности, то есть то, что нам и надо доказать.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                                                                              | баллы    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| верное доказательство                                                                                                                                      | 7 баллов |
| доказано только одно из двух следующих утверждений 1) из условия задачи следует вписанность четырёхугольника; 2) обратное утверждение к указанному выше    | 4 балла  |
| сформулировано утверждение, что условие задачи равносильно вписанности четырёхугольника (при отсутствии доказательства как в одну, так и в другую сторону) | 1 балл   |
| любые рассуждения, не ведущие к решению                                                                                                                    | 0 баллов |

**11.5.** Пусть  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Докажите неравенство  $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$ .

**Решение:**

Способ 1. Пусть  $a^{10} = x$ ,  $b^{15} = y$ . Тогда неравенство принимает вид  $2x^5 + 3y^5 \geq 5x^2y^3$ . Теперь положим  $t = \frac{y}{x}$  ( $t$  может быть любым положительным числом) и получим неравенство  $3t^5 - 5t^3 + 2 \geq 0$ . Проанализируем функцию в левой части неравенства. Её производная равна  $15t^4 - 15t^2$ , поэтому на отрезке  $[0, 1]$  функция убывает, а на луче  $[1, +\infty)$  - возрастает. Остаётся заметить, что в точке  $t = 1$  функция равна 0.

**Примечание:** Анализ функции  $f(t) = 3t^5 - 5t^3 + 2$  можно провести и не используя производную. Например так. Разложим многочлен на множители  $3t^5 - 5t^3 + 2 = (t - 1)(3t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 2t - 2) = (t - 1)^2(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2)$ . При  $t > 0$  все

слагаемые второй скобки неотрицательны, а одно равно 2, то есть выражение во второй скобке строго положительно. Значит, при  $t > 0$  минимум функции равен 0 и достигается в точке  $t = 1$ .

Способ 2. После замены, как в первом способе (замену можно и вовсе не делать, но тогда выкладки будут менее наглядными) докажем полученное неравенство  $2x^5 + 3y^5 \geq 5x^2y^3 \Leftrightarrow 2x^5 + 3y^5 - 5x^2y^3 \geq 0$  для положительных чисел  $x$  и  $y$ . Проведём преобразования левой части

$$\begin{aligned} 2x^5 + 3y^5 - 5x^2y^3 &= 2x^5 - 2x^2y^3 + 3y^5 - 3x^2y^3 = 2x^2(x^3 - y^3) - 3y^3(x^2 - y^2) = \\ &= (x - y)(2x^2(x^2 + xy + y^2) - 3y^3(x + y)) = (x - y)(2x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 - 3xy^3 - 3y^4) = \\ &= (x - y)(2x^4 - 2y^4 + 2x^3y - 2xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + x^2y^2 - y^4) = \\ &= (x - y)(2(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) + 2xy(x - y)(x + y) + xy^2(x - y) + y^2(x - y)(x + y)) = \\ &= (x - y)^2(2(x + y)(x^2 + y^2) + 2xy(x + y) + xy^2 + 2(x + y)). \end{aligned}$$

Теперь неотрицательность полученного выражения очевидна: первый множитель — квадрат некоторого выражения, то есть неотрицателен, а все слагаемые второго множителя, значит, и он сам, положительны.

**Примечание:** На самом деле задача решается в одну строчку, если знать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим  $n$  положи-

тельных чисел, которое выглядит так  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$  (все  $a_i \geq 0$ ). Надо только взять  $n = 5$ ,  $a_1 = a_2 = \sqrt{a}$  и  $a_3 = a_4 = a_5 = \sqrt[3]{b}$ .

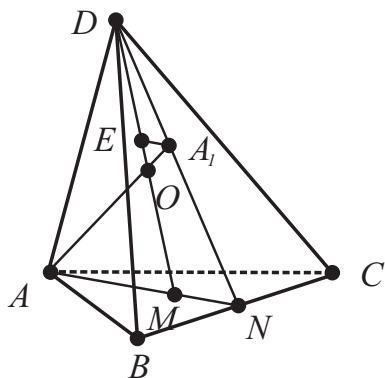
| есть в работе                                                                                                                                                                                                                                    | баллы    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| верное доказательство                                                                                                                                                                                                                            | 7 баллов |
| при верном ходе решения есть алгебраические ошибки, не влияющие на доказательство                                                                                                                                                                | 6 баллов |
| при разложении на множители допущена одна алгебраическая ошибка, не позволившая доказать неравенство                                                                                                                                             | 4 балла  |
| неравенство верно сведено к анализу функции от одной переменной (явно указана функция), но анализ не проведён или имеется попытка разложить выражение на множители, но разложение не доведено до конца (напр. только выделен множитель $x - y$ ) | 3 балла  |
| замечена однородность данного неравенства, то есть то, что после деления обеих частей на $a$ или $b$ получается неравенство одной переменной                                                                                                     | 2 балла  |
| сделана замена, избавляющая неравенство от иррациональных выражений                                                                                                                                                                              | 1 балл   |
| иллюстрация утверждения на конкретных примерах и/или любые выкладки, не ведущие к решению                                                                                                                                                        | 0 баллов |

**От школьника не требуется приведение доказательства неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим  $n$  положительных чисел, даже если это неравенство используется в решении.**

**11.6.** Пусть  $M$  — точка пересечения медиан основания  $ABC$  треугольной пирамиды  $ABCD$ . На отрезке  $MD$  произвольным образом выбрана точка  $O$ . Лучи  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  пересекают боковые грани пирамиды в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что плоскость  $A_1B_1C_1$  параллельна основанию пирамиды.

**Решение:**

Способ 1. Рассмотрим плоскость  $AND$ , где  $N$  — середина ребра  $BC$ . Эта плоскость проходит и через точку  $M$ , следовательно, через точку  $O$ , следовательно, через прямую  $AO$  и через точку  $A_1$ . Проведём в плоскости сечения прямую  $A_1E$  параллельно  $AN$  ( $E$  — точка пересечения этой прямой с отрезком  $DM$  — см. рисунок 1). Тогда точка  $E$  — точка пересечения отрезка  $DM$  с плоскостью, проходящей через точку  $A_1$  параллельно основанию  $ABC$ . Нам достаточно доказать, что длина  $DE$  не зависит от того, какую из вершин основания мы возьмём в качестве  $A$ . Из подобия треугольников  $A_1ED$  и  $NMD$  следует, что  $\frac{DE}{DM} = \frac{DA_1}{DN}$ , то есть длина отрезка  $DE$  зависит только от отноше-

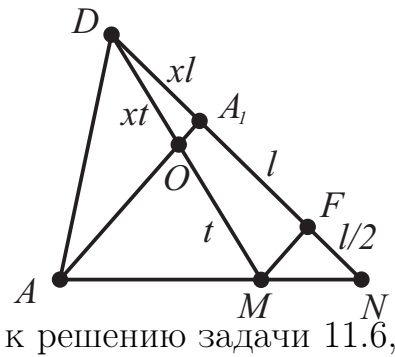


к решению задачи 11.6,  
первый способ,  
рисунок 1

нования мы возьмём в качестве  $A$ . Из подобия треугольников  $A_1ED$  и  $NMD$  следует, что  $\frac{DE}{DM} = \frac{DA_1}{DN}$ , то есть длина отрезка  $DE$  зависит только от отноше-

ния  $\frac{DA_1}{DN}$ . Выразим это отношение через отношение  $\frac{DO}{OM}$  которое не зависит от выбора вершины основания. Пусть  $\frac{DO}{OM} = x$ . Проведём через точку  $M$  прямую, параллельную прямой  $AO$ . Пусть эта прямая пересекает отрезок  $DN$  в точке  $F$  — см. рисунок 2.

Из подобия треугольников  $DA_1O$  и  $DFM$  получаем, что  $\frac{DA_1}{A_1F} = \frac{DO}{OM} = x$ , то есть если  $A_1F = l$ , то  $DA_1 = xl$ . Из подобия треугольников  $NMF$  и  $NAA_1$  и того факта, что  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ , следует равенство  $A_1F = 2FN$ , то есть  $FN = l/2$ . Но тогда  $\frac{DA_1}{DN} = \frac{xl}{xl + l + 0,5l} = \frac{x}{x + 1,5}$ . Мы достигли своей цели, показав, что отношение  $\frac{DA_1}{DN}$  не зависит от выбора вершины основания.



первый способ,

рисунок 2

**Примечание 1:** Доказательство независимости можно было провести и иначе. Например, можно сослаться на теорему Менелая для треугольника  $NDM$  и секущей  $A_1O$ . Согласно этой теореме, отношение  $\frac{DA_1}{DN}$  определяется дробями  $\frac{DO}{OM}$  и  $\frac{NA}{AM}$ , а так как последняя равна 2, то только дробью  $\frac{DO}{OM}$ . Независимость доказана, а с ней и всё утверждение задачи.

Способ 2. Докажем параллельность прямых  $AB \parallel A_1B_1$ . (Аналогично можно доказать, что  $AC \parallel A_1C_1$  и этого будет достаточно для полного обоснования утверждения задачи.) Рассмотрим векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$  и  $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ . Выразим через них векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{A_1B_1}$ . Ясно, что  $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$ . Для нахождения вектора  $\overrightarrow{A_1B_1}$  разложим по базису  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  вектор  $\overrightarrow{DA_1}$ . Так как при таком разложении векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  равноправны, то в само разложение эти векторы входят с одинаковыми коэффициентами, то есть  $\overrightarrow{DA_1} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \beta\vec{c}$  для некоторых чисел  $\alpha$  и  $\beta$ . Но разложение по базису  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  вектора  $\overrightarrow{DB_1}$  будет таким же с точностью до обозначений, то есть  $\overrightarrow{DB_1} = \beta\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$  (коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  те же самые!). Значит,  $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} = (\beta - \alpha)\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b} = (\alpha - \beta)\overrightarrow{AB}$ , то есть векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{A_1B_1}$  коллинеарны. Утверждение доказано.

**Примечание 2:** Не сложно (хотя и несколько громоздко) выразить вектор  $\overrightarrow{A_1B_1}$  через  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  в явном виде. Например, можно сделать так. Легко доказывается (причём разными способами), что  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ . Так как точка  $O$  лежит на отрезке  $DM$ , векторы  $\overrightarrow{DO}$  и  $\overrightarrow{DM}$  коллинеарны, поэтому для некоторого числа  $t$  имеет место равенство  $\overrightarrow{DO} = t\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}$ , а тогда  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\vec{a} + t\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}$ . Из коллинеарности векторов  $\overrightarrow{AO}$  и  $\overrightarrow{AA_1}$  следует, что  $\overrightarrow{AA_1} = k\overrightarrow{AO} = k(t-1)\vec{a} + kt\vec{b} + kt\vec{c}$ . Теперь  $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} = (1+k(t-1))\vec{a} + kt\vec{b} + kt\vec{c}$ . Так как вектор  $\overrightarrow{DA_1}$  лежит

в плоскости векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , при его разложении по базису  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  коэффициент при  $\vec{a}$  равен нулю, поэтому  $1 + k(t-1) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{1-t}$ . Значит,  $\overrightarrow{DA_1} = \frac{t}{1-t}\vec{b} + \frac{t}{1-t}\vec{c}$ . Аналогично,  $\overrightarrow{DB_1} = \frac{t}{1-t}\vec{a} + \frac{t}{1-t}\vec{c}$ , откуда  $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} = \frac{t}{1-t}\vec{a} - \frac{t}{1-t}\vec{b}$ .

**Примечание 3:** Задача имеет планиметрический аналог, а именно: пусть на медиане  $CM$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $O$ . Обозначим через  $A_1$  точку пересечения прямых  $AO$  и  $BC$ , через  $B_1$  — прямых  $BO$  и  $AC$ . Тогда прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  параллельны.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                                                                                                              | баллы    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| верное доказательство                                                                                                                                                                      | 7 баллов |
| в верном доказательстве имеются посторонние неверные утверждения                                                                                                                           | 6 баллов |
| при верно проводимом (виден до конца ход решения) векторном (координатном) доказательстве есть арифметические ошибки, не позволившие доказать утверждение                                  | 5 баллов |
| задача сведена к планиметрической, или задача полностью переформулирована на языке векторов и/или координат, но новая задача не решена                                                     | 3 балла  |
| имеется идея рассмотреть точку пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ и прямой $DM$ или доказать, что точки $A_1$ , $B_1$ и $C_1$ лежат “на одной высоте” (равноудалены от плоскости основания) | 2 балла  |
| обосновано, что точки $A_1$ , $B_1$ и $C_1$ (хотя бы одна из них) лежит на медиане боковой грани                                                                                           | 1 балл   |
| разобран случай правильной пирамиды                                                                                                                                                        | 0 баллов |